マスクの解析学ノート

大盛マスク

2017 年 5 月 17 日

マスクの資料保管庫
http://worldinfo.wicurio.com/
TwitterID : @Uton_YaYuYo

1　解析定型文

一般的に、数学に対して「定型文」などというものは、
数学に対する冒涜である。
しかし、定型文を覚えれば、単位が近くなるだけでなく、
かみ砕いて理解するための近道となる可能性も ϵ ほどある。

1.1　$\lim_{x\to\infty} f(x)$ の証明

任意な$\epsilon > 0$に対して、
1つの自然数を$N >$ $\boxed{}$ となるようにとれば、
$n > N$ならば、$|a_n - a| =$ $\boxed{\text{nの式}}$ $<$ $\boxed{\text{Nの式}}$ $< \epsilon$

1.2　a_nが∞に発散する証明

任意な$M > 0$に対して、
1つの自然数を$N >$ $\boxed{}$ となるようにとれば、
$n > N$ならば、$|a_n - a| =$ $\boxed{\text{nの式}}$ $>$ $\boxed{\text{Nの式}}$ $> M$

1.3　$\epsilon - \delta$ 論法

任意な$\epsilon > 0$に対して、 $\boxed{}$ とすれば、
$0 < |x - x_0| < \delta$ ならば、
$f(x) - y_0 =$ $\boxed{\text{xの式}}$ $<$ $\boxed{\delta\text{の式}}$ $= \epsilon$
となる。ゆえに、$f(x) \to y_0\ (x \to x_0)$

1.3.1　δ^2の項

$0 < \delta < 1$ とすると、 $\delta^2 < \delta$

1.4 $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ の証明

任意な正の数Mに対して、正の数δを$\delta <$ $\boxed{M\text{の式}}$
となるようにとると、
$0 < |x - x_0| < \delta$ ならば $f(x) >$ $\boxed{\delta\text{の式}}$ $> M$
したがって、$f(x) \to +\infty$ $(x \to y_0)$

1.5 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = y_0$ の証明

$x < -M < 0$のとき、$|x| > M$であるから、
$|f(x) - y_0| =$ $\boxed{\text{x の式}}$ $<$ $\boxed{\text{M の式}}$ $< \epsilon$
任意な $\epsilon > 0$ に対して、$0 < \frac{1}{\epsilon} < M$ となるようにMをとれば、
$x < -M < 0$ ならば、$|\frac{1}{x} - 0| < \epsilon$
よって、 $f(x) \to y_0$

2 実数

実数は幾つかの性質を持つが、
教科書では４つの性質に整理されている。

性質[I]：四則計算
性質[II]：大小の順序
性質[III]：稠密性
性質[VI]：連続性

2.1　性質[I]：四則計算ができる

　実数に限らず、加減乗除のうち
足し算（加)、引き算、（減)、掛け算（乗）
については整数・有理数の範囲でも成り立つし、
割り算（除）も有理数の範囲で成り立つ。
なじみ深い性質なので、深入りする必要もないだろう。

2.2　性質[II]：大小の順序がつく

　これも、自然数、整数、有理数の範囲で成り立つ話で、
実数特有ではない。
$1 < 2$
のように、当たり前の話である。
しかし、「大小の順序がつく」ことによって、
以下の二つの性質が引き出せる。

2.2.1　性質：無限である

　これは性質[I]と[II]から引き出せる。
どんな実数にも大小の順序がつくということは、
どんな大きい数でも、それより大きな数があることになる。

もし、最後の実数なるものがあると仮定すると、
（最後の実数）＜（最後の実数＋１）
「最後の実数」より大きな数が存在するため、矛盾する。

というわけで、実数や整数に「最後」はなく、無縁である。

2.2.2　性質：アルキメデスの公理

　これも性質[I]と[II]から引き出せる。

$0 < b < a$
$a, b \in \mathbf{R}$
つまり、実数aとbを用意して、bがaより小さいとき、
$a < n$b となる自然数nが存在する。

具体的に書けば、
$a = 100, b = 3$
としたとき、 $0 < 3 < 100$ なのだが、
$n = 34$としてやると、 $100 < 34 \times 3$ となる。
（別にnは35だって、100だって、1億だっていい。）

実数aがどんなに大きくても、実数bがどんなに小さくても、
すごく大きい自然数nをbに掛けてやってnbにすれば、 aを越えることができる。
そういう希望ある数学的結論である。

2.3　性質[III]：稠密性

　これは有理数の範囲でも成り立つ。
実数が稠密である、つまり、すごくたくさん詰まってるというのは、
高校レベルでも、教科書のレベルでも当然のものとして扱う。

二つの実数、例えば、区間 [1.23 , 1.56]
つまり、1.23と1.56の間……という狭い範囲ですら、
無限の有理数と実数が含まれている。

2.4　性質[VI]：連続性

　性質[I]〜[III]とは異なり、この性質は実数にしかない。
言い換えれば、これが、有理数でない実数の性質を明らかにしたものであるが、
だからこそ、実数で一番難易度が高い部分でもある。

2.4.1　カントールの公理

　一般的な話はおいておいて、
ここでは、具体的に一つに実数を用いて考える。
何を選んでもいいが、円周率
$\pi = 3.14159265$
を使ってみる。

区間1番= [3 , 4] とすると、 $3 < \pi < 4$
区間2番= [3.1 , 3.2] とすると、 $3.1 < \pi < 3.2$
区間3番= [3.14 , 3.15] とすると、 $3.14 < \pi < 3.15$
区間4番= [3.141 , 3.142] とすると、 $3.141 < \pi < 3.142$
区間5番= [3.1415 , 3.1416] とすると、 $3.1415 < \pi < 3.1416$
区間6番= [3.14159 , 3.14160] とすると、 $3.14159 < \pi < 3.14160$
区間7番= [3.141592 , 3.141593] とすると、 $3.141592 < \pi < 3.141593$

こんなふうに、
π を含みながら、1桁づつ増やしていって、
区間を狭め続けることができる。
今は区間7番までしか書いてないが、
どんなに狭くても
（例えば区間の幅が0.0000000000000001であっても、）
π を含むように区間を設定できる。

では、上記のノリで、区間を狭めていき、
区間100番、区間1億番、そして区間∞番まで作っても、
π を含むように設定は可能である。

区間∞番まで作っちゃったとき
区間1番から区間 ∞ 番まで共通で含まれてる実数は π だけで、
他の実数は含まれてない。

区間を設定するために使った数は小数、
つまり有理数の一種だった。
しかし、有理数で表記した区間を狭めて行くと、
無理数にたどり着ける……というのがポイント。

3　数列と極限

3.1　数列、部分数列の定義の注意

高校と定義が微妙に異なる。

高校のときは、数列、部分数列はともに有限個の数列を認めていたが、
解析の教科書だと無限個の数列・部分数列のみが議論されている。
よって、何も言わなくても、無限に続いていると考えるべし。

4　今日はここまで★

5　更新記録

2017年05月17日リリース