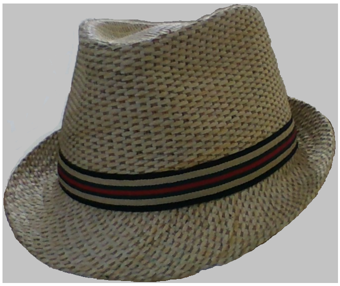
マスクの解析学ノート 04 関数

大盛マスク

2017 年 5 月 28 日



マスクの資料保管庫
http://worldinfo.wicurio.com/
TwitterID : @Uton_YaYuYo

これは未完成稿ですが、中間テストが近いため暫定公開します。

目次

1　関数の極限に入る前のいろいろな定義

1.1　合成関数

$(G \circ F)(x) = G(F(x))$

1.2　単調〇〇

1.2.1　単調増加

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

1.2.2　単調減少

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

1.2.3　広義の単調増加

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

1.2.4　広義の単調減少

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

1.3　有界

任意な$x \in D$ に対して（つまり、xが定義域の範囲で動くとき）、$f(x) \leq M$　なら　上方に有界 $m \leq f(x)$　なら　下方に有界 $m \leq f(x) \leq M$ なら　有界

1.4　逆三角関数

$y = \sin^{-1} x$　のとき $x = \sin y$　で、

定義域が$[-1,1]$、
値域が$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

$y=\cos^{-1}x$　のとき $x=\cos y$　で、
定義域が$[-1,1]$、
値域が$[0,\pi]$

$y=\tan^{-1}x$　のとき $x=\tan y$　で、
定義域が$[-\infty,+infty]$、
値域が$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

1.5　三角関数の逆数

$$cosec\ x=\csc x=\frac{1}{\sin x} \tag{1}$$

$$\sec x=\frac{1}{\cos x} \tag{2}$$

$$\cot x=\frac{1}{\tan x} \tag{3}$$

2　$\epsilon-\delta$ 論法

2.1　$\epsilon-\delta$ 論法定型文

任意な$\epsilon>0$に対して、$\delta=\boxed{}$ とすれば、
$0<|x-x_0|<\delta$ ならば、
$f(x)-y_0=\boxed{\text{xの式}}<\boxed{\delta\text{の式}}=\epsilon$
となる。ゆえに、$f(x)\to y_0\ (x\to x_0)$

2.2 δ^2の項

$0 < \delta < 1$ とすると、 $\delta^2 < \delta$ を使う。

2.2.1 $x \to x_0$ のとき、 $x^2 \to x_0^2$ の証明

例題には

$$\lim_{x \to x_0} x^2 \to x_0^2 \tag{4}$$

の証明がある。

定型文に収めるために $|f(x) - y_0|$ を計算するが、

$|f(x) - y_0| = |x^2 - x_0^2| = |x - x_0||x + x_0|$

となってしまい、 $0 < |x - x^0| < \delta$ がうまく適応できないことがある。

この時は、無理矢理 $x - x_0$ を創成するとよい。

$|x - x_0||x + x_0| = |x - x0||x - x_0 + 2x_0| < \delta|\delta + 2x_0|$

さらに、$|\delta + x_0|$ を整理するために、

三角不等式 $|a + b| < |a| + |b|$を使い、

$|\delta + 2x_0| < |\delta| + |x_0| = \delta + 2|x_0|$ をとすると、

$\delta|\delta + x_0| < \delta^2 + 2\delta|x_0|$ となる。

こうなるとδ^2の項がでて、困ってしまう。よって、δ^2 を消すために、

$0 < \delta < 1$ とすれば、 $\delta^2 < \delta$ となる。よって、

$\delta^2 + 2\delta|x_0| < \delta + 2\delta|x_0| < \delta(1 + 2|x_0|) < \epsilon$

よって、

$$\delta = \frac{\epsilon}{1 + |x_0|} \tag{5}$$

ここまで材料がそろったところで証明をまとめると、

任意な$\epsilon > 0$に対して、$\delta = \delta = \dfrac{\epsilon}{1+|x_0|}$ とすれば、

$0 < |x - x_0| < \delta$ ならば、

$|f(x) - y_0|$

$= |x^2 - x_0^2|$

$= |x - x_0||x + x_0|$

$= |x - x_0||x - x_0 + 2x_0|$

$< \delta|\delta + 2x_0|$

$< \delta^2 + 2\delta|x_0|$

$< \delta + 2\delta|x_0|$

$< \delta(1 + 2|x_0|) < \epsilon$

となる。ゆえに、$f(x) \to y_0 \ (x \to x_0)$

3 振動が収束しないことの証明

基本方針は x_0 付近でも変動していることを示せばいい。

4 片側極限

通常の極限では、

$0 < |x - x_0| < \delta$ ならば、$f(x) - y_0 < \epsilon$

を証明したが、片側極限では、$0 < |x - x_0| < \delta$ の絶対値をとっぱらう。

右側極限（+側極限）なら、

$0 < x - x_0 < \delta$ ならば、$f(x) - y_0 < \epsilon$

左側極限（-側極限）なら、

$0 < x_0 - x < \delta$ ならば、$f(x) - y_0 < \epsilon$

※$x_0 - x = -(x - x_0)$

5 $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ の証明

任意な正の数Mに対して、正の数δを$\delta <\boxed{M の式}$
となるようにとると、
$0 < |x - x_0| < \delta$ ならば $f(x) >\boxed{\delta の式}> M$
したがって、$f(x) \to +\infty$ $(x \to x_0)$

6 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = y_0$ の証明

$x < -M < 0$のとき、$|x| > M$であるから、
$|f(x) - y_0| =\boxed{\mathrm{x の式}}<\boxed{\mathrm{M の式}} < \epsilon$
任意な $\epsilon > 0$ に対して、$0 < \frac{1}{\epsilon} < M$ となるようにMをとれば、
$x < -M < 0$ ならば、$|\frac{1}{x} - 0| < \epsilon$
よって、 $f(x) \to y_0$

7 合成関数の極限定理1.7

$\lim x\ tox_0, g(f(x)) = b$ の証明
ただし、
$(1) : \lim x \to x_0$ のとき、 $f(x) = a$
$(2) : \lim x \to a$ のとき、 $g(x) = b$
$(3) : g(a) = b$

式(1)と式(2)から、
$0 < |x - x_0| < \delta$ ならば、 $|f(x) - a| < \epsilon$

$0 < |y - a| < \delta'$ ならば、 $|g(x) - b| < \epsilon'$
となるが、
$|f(x) - a| < \epsilon$ と $0 < |y - a| < \delta'$ が一致すればOKと考えるのが起点。

ポイントは、$y = f(x)$と考えただけでは、一致しないため、もう二つ工夫する必要がある。

一つ目の工夫は、$\epsilon = \delta'$と置くこと。これで、2式が連動する。

もう一つは、$g(a) = b$ を使い、
$y = a$ のとき $g(y) = b$
なので、
$|y - a|$ のとき、$|g(y) - b| = 0 < \epsilon'$
よって、$0 < |y - a| < \delta'$ の「$0 <$」が取れて、
$|y - a| < \delta'$ ならば、 $|g(x) - b| < \epsilon'$
になる。

これで、$|f(x) - a| < \epsilon$と$|y - a| < \delta'$は同じになったため、教科書のような証明文が書ける。

8 連続

8.1 連続の定義

$x = a$で連続とは、

i $x = a$ とその近辺で定義されてる
ii $\lim x \to af(x)$ が存在する。
iii $\lim x \to af(x) = f(a)$

の三つの条件が成り立つ
条件[iii]があれば[i][ii]は若干重複な感があるが、
解放的には [i]と[ii] はよく使う。

9　参考文献

参考文献

[1] 微分積分学・矢野健太郎・石原繁

10　更新記録

2017年05月28日リリース