マスクの解析学ノート 03 数列

大盛マスク

2017 年 5 月 25 日

マスクの資料保管庫
http://worldinfo.wicurio.com/
TwitterID : @Uton_YaYuYo

これは未完成稿ですが、中間テストが近いため暫定公開します。

1　数列、部分数列の定義の注意

高校と定義が微妙に異なる。
高校のときは、数列、部分数列はともに有限個の数列を認めていたが、
解析の教科書だと無限個の数列・部分数列のみが議論されている。
よって、何も言わなくても、無限に続いていると考えるべし。

2　数列の極限パターン分け

- 収束
  - 「ずっと一定」
  - 「ある値に収束」
- 発散
  - 「∞に発散する」
  - 振動
    - 「規則的に行き来する」
    - 「不規則に行き来する」

なお、これ以降、数列を a_n とし、収束する場合は値を a とする。
また、「不規則に行き来する」パターンはまだ考えてません。

3　ある値に収束する（$\epsilon - N$論法）

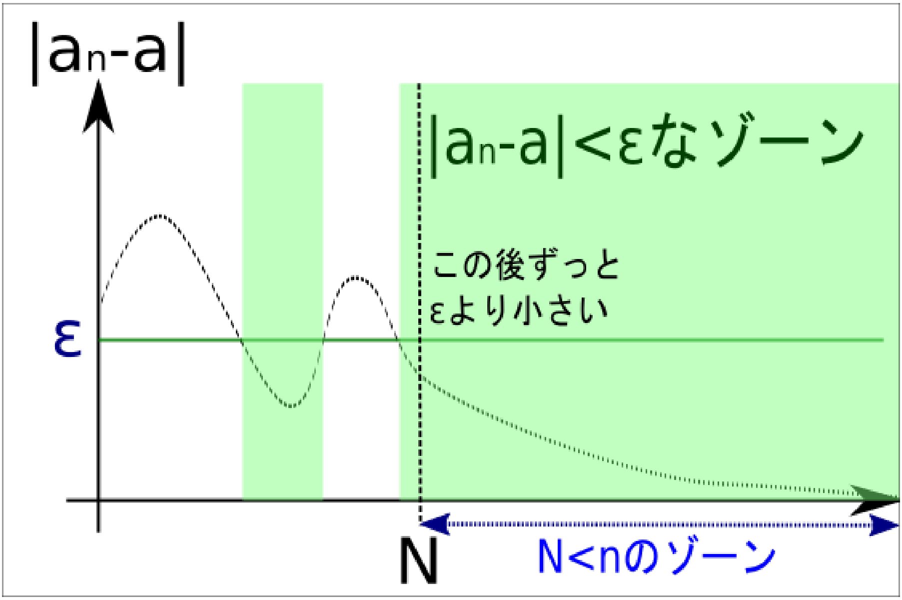

図1　ある値に収束する

3.1　$\lim_{x\to\infty} a_n = a$ の証明：定型文

任意な$\epsilon > 0$に対して、

1つの自然数を$N >$ $\boxed{}$ となるようにとれば、

$n > N$ならば、$|a_n - a| = \boxed{\text{nの式}} < \boxed{\text{Nの式}} < \epsilon$

4　$+\infty$に発散する

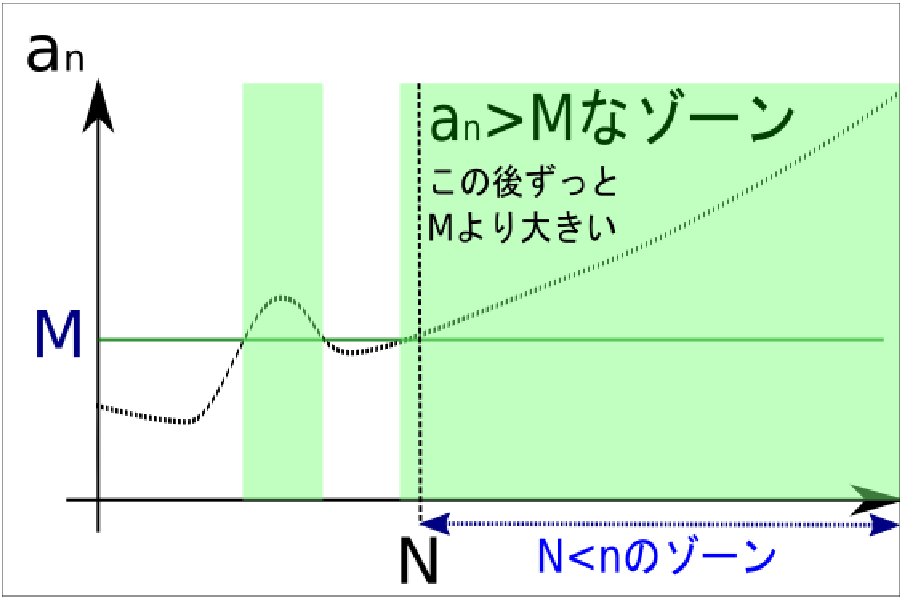

図2　$+\infty$に発散する

4.1　a_nが∞に発散する証明：定型文

任意な$M > 0$に対して、

1つの自然数を$N > \boxed{}$となるようにとれば、

$n > N$ならば、$|a_n - a| = \boxed{\text{nの式}} > \boxed{\text{Nの式}} > M$

4.2　-∞に発散する

$-a_n$ が $+\infty$ に発散することを証明する。

5　規則的に振動する

$|a_{n+b} - a_n| = c (c \in \mathbf{R})$
となるような数列を考える。
$a_n \to a\ (n \to +\infty)$
と仮定すると、
$a_{n+b} - a_n \to 0, (b \in \mathbf{Z})$ となるが、
規則的に変化するとき、
$|a_{n+b} - a_n| = c$なので、
$a_n \to a\ (n \to +\infty)$ に反する。
よって、a_n は収束しない。

参考文献

[1] 微分積分学・矢野健太郎・石原繁

6　更新記録

2017年05月25日リリース