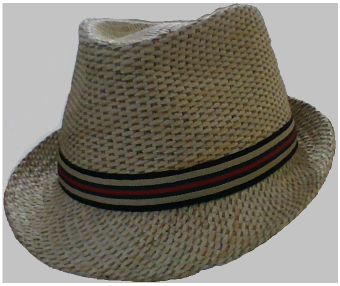
マスクの解析学ノート 02 実数

大盛マスク

2017 年 5 月 17 日



マスクの資料保管庫
http://worldinfo.wicurio.com/
TwitterID : @Uton_YaYuYo

1　実数

　実数は幾つかの性質を持つが、
教科書では４つの性質に整理されている。

性質[I]：四則計算
性質[II]：大小の順序
性質[III]：稠密性
性質[VI]：連続性

2　性質[I]：四則計算ができる

　実数に限らず、加減乗除のうち
足し算（加)、引き算、(減)、掛け算（乗）
については整数・有理数の範囲でも成り立つし、
割り算（除）も有理数の範囲で成り立つ。
なじみ深い性質なので、深入りする必要もないだろう。

3　性質[II]：大小の順序がつく

　これも、自然数、整数、有理数の範囲で成り立つ話で、
実数特有ではない。
$1 < 2$
のように、当たり前の話である。
しかし、「大小の順序がつく」ことによって、

以下の二つの性質が引き出せる。

3.1　性質：無限である

　これは性質[I]と[II]から引き出せる。
どんな実数にも大小の順序がつくということは、
どんな大きい数でも、それより大きな数があることになる。

もし、最後の実数なるものがあると仮定すると、
（最後の実数）＜（最後の実数＋１）
「最後の実数」より大きな数が存在するため、矛盾する。

というわけで、実数や整数に「最後」はなく、無縁である。

3.2　性質：アルキメデスの公理

　これも性質[I]と[II]から引き出せる。

$0 < b < a$
$a, b \in \mathbf{R}$
つまり、実数aとbを用意して、bがaより小さいとき、
$a < n$b となる自然数nが存在する。

具体的に書けば、
$a = 100, b = 3$
としたとき、 $0 < 3 < 100$ なのだが、

$n = 34$としてやると、 $100 < 34 \times 3$ となる。
（別にnは35だって、100だって、1億だっていい。）

実数aがどんなに大きくても、実数bがどんなに小さくても、
すごく大きい自然数nをbに掛けてやってnbにすれば、 aを越えることができる。
そういう希望ある数学的結論である。

4　性質[III]：稠密性

　これは有理数の範囲でも成り立つ。
実数が稠密である、つまり、すごくたくさん詰まってるというのは、
高校レベルでも、教科書のレベルでも当然のものとして扱う。

二つの実数、例えば、区間 [1.23 , 1.56]
つまり、1.23と1.56の間……という狭い範囲ですら、
無限の有理数と実数が含まれている。

5　性質[VI]：連続性

　性質[I]～[III]とは異なり、この性質は実数にしかない。
言い換えれば、これが、有理数でない実数の性質を明らかにしたものであるが、
だからこそ、実数で一番難易度が高い部分でもある。

5.1　カントールの公理

　一般的な話はおいておいて、
ここでは、具体的に一つに実数を用いて考える。
何を選んでもいいが、円周率
$\pi = 3.14159265$
を使ってみる。

区間1番＝ $[\ 3\ ,\ 4\ ]$ とすると、 $3 < \pi < 4$
区間2番＝ $[\ 3.1\ ,\ 3.2\ ]$ とすると、 $3.1 < \pi < 3.2$
区間3番＝ $[\ 3.14\ ,\ 3.15\ ]$ とすると、 $3.14 < \pi < 3.15$
区間4番＝ $[\ 3.141\ ,\ 3.142\ ]$ とすると、 $3.141 < \pi < 3.142$
区間5番＝ $[\ 3.1415\ ,\ 3.1416\ ]$ とすると、 $3.1415 < \pi < 3.1416$
区間6番＝ $[\ 3.14159\ ,\ 3.14160\ ]$ とすると、 $3.14159 < \pi < 3.14160$
区間7番＝ $[\ 3.141592\ ,\ 3.141593\ ]$ とすると、 $3.141592 < \pi < 3.141593$

こんなふうに、
π を含みながら、1桁づつ増やしていって、
区間を狭め続けることができる。
今は区間7番までしか書いてないが、
どんなに狭くても
（例えば区間の幅が0.00000000000000001であっても、）
π を含むように区間を設定できる。

では、上記のノリで、区間を狭めていき、
区間100番、区間1億番、そして区間∞番まで作っても、
π を含むように設定は可能である。

区間∞番まで作っちゃったとき
区間1番から区間 ∞ 番まで共通で含まれてる実数は π だけで、
他の実数は含まれてない。

区間を設定するために使った数は小数、
つまり有理数の一種だった。
しかし、有理数で表記した区間を狭めて行くと、
無理数にたどり着ける……というのがポイント。

6　更新記録

2017年05月17日リリース